2. Произведение отношений, обратное отношение.

1. Произведение (композиция) отношений

Определение

Пусть даны два отношения:

* R⊆A×B,
* S⊆B×C.

Тогда их композиция (или «произведение») S∘R будет отношением из A×C и определяется так:

S∘R  =  { (a,c) ∣ ∃b∈B: (a,b)∈R  и  (b,c)∈S}.

Говоря словами:

* Мы берём пару (a,c) и включаем её в S∘R, если существует такой элемент b∈B, что (a,b)принадлежит R и одновременно (b,c) принадлежит S.

Интерпретация

* Можно думать об этом так: R «сопоставляет» элементы из A элементам из B, а S — из B элементам из C. Тогда композиция S∘R показывает, какие элементы из A в итоге можно «сопоставить» с элементами из C путём цепочки через B.

Пример

Пусть:

* A={1,2},
* B={x,y},
* C={p,q}.

Зададим два отношения:

R  =  { (1,x),(1,y),(2,x)}    ⊆  A×B,

S  =  { (x,p),(y,q)}    ⊆  B×C.

Композиция S∘R:

* Чтобы (a,c) попала в S∘R, нужен промежуточный b∈B, где (a,b)∈R и (b,c)∈S

Проверим по элементам A:

1. Для a=1:
   * Из R видим пары (1,x) и (1,y)
     + Если берём (1,x), то надо смотреть, есть ли в S пара (x, ⋅ ). В S действительно есть (x,p). Значит (1,p) войдёт в композицию.
     + Если берём (1,y), то надо смотреть, есть ли (y, ⋅ ) в S. Да, (y,q). Следовательно (1,q) тоже войдёт в композицию.
2. Для a=2:
   * Из R идёт пара (2,x). Проверяем: в S есть (x,p). Значит (2,p) войдёт в S∘R.
   * (2,y) в R не было, поэтому никакого (2,q) через y не появится.

Итого получаем:

S∘R  =  {(1,p),(1,q),(2,p)}  ⊆A×C.

Таким образом, цепочки «1→x→p», «1→y→q», «2→x→p» показывают нам соответствующие пары (1,p), (1,q), (2,p) в композиции.

* 1. Обратное отношение

Определение

Пусть R — бинарное отношение между множествами A и B, то есть R⊆A×B. Обратным к R называется отношение ⊆B×A, определённое так:

  =  { (b,a) ∣ (a,b)∈R}.

* Если (a,b)∈R, то «переворачиваем» пару: (b,a)∈.
* Иными словами, в «первым элементом» пары является то, что было вторым элементом в R, и наоборот.

Если R — это отношение на одном и том же множестве A (то есть R⊆A×A), тогда ⊆A×A тоже. Пример: если (x,y)∈R, то (y,x)∈.

## Пример

### Пример 1 (на разных множествах)

Пусть A={1,2}, B={x,y}. Зададим R⊆A×B:

R={(1,x),(2,x),(2,y)}.

Тогда **обратное** отношение ⊆B×A будет состоять из «перевёрнутых» пар:

={(x,1),(x,2),(y,2)}

* Смотрим, в R были пары (1,x), (2,x), (2,y). Меняем порядок: (x,1), (x,2), (y,2).

### Пример 2 (на одном множестве)

Пусть есть M={a,b,c}, и на M задано отношение

R={(a,a),(a,b),(b,c)}    ⊆M×M.

Тогда

={(a,a),(b,a),(c,b)}.

* Заметим, что (a,a) переходит в (a,a) (такие пары обычно называют «петли», они совпадают сами с собой даже при «перевороте»).
* Пара (b,c) обращается в (c,b) и т. д.

# 3. Короткие комментарии и связь с другими операциями

1. **Композиция** отношений важна для построения сложных соответствий: если R связывает объекты из A с B, а S — из B с C, то S∘R показывает, как объекты A связаны с C через «промежуточное» B.
2. **Обратное отношение** даёт способ «перевернуть» направление связи. В графах (если представить отношение как ориентированный граф) — это значит, что все стрелки меняют направление.